線形代数 I (担当 松下勝義)

VI. 行列式の解法

教科書 §4.3-4.6, pp.53–75

- 行列式の解法
  まず行列式に対して一列目の一番上以外が 0 のときより小さい行列式に帰着される.
  - n=2 の場合
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(12)a_{11}a_{22} + 0 \\ &= a_{11}\mathrm{sgn}(2)a_{22} \\ &= a_{11}|a_{22}|\end{aligned}$$
  - 具体例
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 \tag{442}$$
    実際,
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2)1 \times 3 + \mathrm{sgn}(2\ 1)2 \times 0 = 1 \times 3 = 3 \tag{443}$$
    と一致する.
  - 三次元の場合
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{32}a_{23} + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_{11}\left(\mathrm{sgn}(2\ 3)a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}(3\ 2)a_{32}a_{23}\right) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{444}$$
  - 具体例
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (\mathrm{sgn}(1\ 2)4 \times 7 + \mathrm{sgn}(2\ 1)5 \times 6) = -2 \tag{445}$$

– 高次元でも数学的帰納法で同じことがいえる (教科書参照)

– 行列の次元低減による解法

行列の次元低減による解法

もし行列 $\hat{A}$ の行列式の $|\hat{A}|$ の左の列ベクトルを

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{446}$$

と変形できれば

n 次元行列式 $\Rightarrow$ $n-1$ 次元行列式 $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 2 次元行列式

と次元を小さくして低次元の行列式の計算にすることで計算できる.

– 式 (446) は行基本変形で変形することで実現できる.

行列式の行基本変形

1. 一つの行に 0 出ない定数 k を掛ける.
   $\Rightarrow$ 行列式は k 倍される.
   例:
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{447}$$

2. 一つの行の低数倍を他の行に足す. $\Rightarrow$ 行列式は変わらない.
   例:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{448}$$

3. 行を入れ替える.
   $\Rightarrow$ 行列式の符号が変わる.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \tag{449}$$

これらの行基本変形を使えば掃き出し法でやったように一列目を (446) のように変形できる.

- 行の定数倍の具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0 \tag{450}$$

実際に

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2) 1 \times 4 + \mathrm{sgn}(2\ 1) 2 \times 2 = 4 - 4 = 0 \tag{451}$$

- 行列式の計算の例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} \overset{②-①}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} \tag{452}$$

$$\overset{②-③}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \tag{453}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \tag{454}$$

$$\overset{②-①}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \tag{455}$$

$$\overset{②/2}{=} 1 \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{456}$$

$$\overset{①\Leftrightarrow②}{=} 1 \times 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \tag{457}$$

$$\overset{②-4①}{=} 1 \times 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{458}$$

$$= 1 \times 2 \times (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) \times 1 \times 1 = -2 \tag{459}$$

- 行列式と列基本変形行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{460}$$

の転置したもの

$$\hat{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{461}$$

を転置行列と呼ぶ．このとき

転置行列の行列式

$$|\hat{A}| = |\hat{A}^t| \tag{462}$$

従って次のことがいえる．

行列式の列基本変形

列に対する基本変形を行っても行基本変形と同じことが成立する．