演習 3

以下に示した行列の演算を計算せよ.

- 演習問題 3–1 次の行列のペア $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の和 $\hat{A}+\hat{B}$ と二種類の積 $\hat{A}\hat{B}$ 及び $\hat{B}\hat{A}$ を定義できる場合は計算せよ. できない場合は理由を述べよ.
  - (a)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - (b)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 演習問題 3–2. 行列 $\hat{C}$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{216}$$

  に対して $\hat{C}^3$ を計算せよ.
  ヒント: 問題 3–1(b) の和と単位行列の性質を用いると簡単に計算できる.

- 演習問題 3–3 次の三つの 2 次正方行列の中から条件を満たす行列を選べ.

$$\hat{P}_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{217}$$

  - (a) 左からかけた際, 2 行目を 3 倍して 1 行目へ足す行列.
  - (b) 左からかけた際, 1 行目と 2 行目を入れ替える行列.
  - (c) 左からかけた際, 2 行目を 3 倍する行列
  - (d) 左からかけた際, 1 行目を −2 倍して 2 行目へ足す行列.

  ヒント: それぞれの行列を行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{218}$$

  へかけたときどの様に変化するかを調べよ.

- 演習問題 3–4 次の行列 $\hat{A}$ を階段行列にする行列を, 行基本変形に対応する行列の積として作れ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{219}$$

ヒント: 問題 3–4 で行基本変形に対する行列の基本的な物は与えられている. そこでまず $\hat{A}$ から階段行列を作って, 行基本変形の手順を調べる. そして, その手順を再現するように, 順番に基本変形に対応する行列を掛けてゆくと良い.